Permutace a determinanty

Permutace je prosté zobrazení množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ na sebe. Nejčastěji se zapisuje tabulkou, v níž nad sebou stojí dvojice vzor, obraz. Permutace se jakožto zobrazení dají skládat, např.

$$\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Permutace π_1 tedy zobrazuje např. 1 na 4, 2 na 1 atd., $\pi_2(1) = 5$ atd. Zobrazení skládáme tak, jak je zvykem u funkcí, kde např $\sin \ln(x)$ znamená, že *napřed* počítáme logaritmus x a z výsledku pak sinus, stejně tak $(\pi_2 \circ \pi_1)(1) = \pi_2(4) = 3$ atd. Permutace tvoří nekomutativní grupu vzhledem ke skládání, v níž neutrálním prvkem je identita $\pi(i) = i$ a inverzním prvkem k $\pi(i) = j$ je inverzní zobrazení $\pi^{-1}(j) = i$, které existuje díky prostotě π. Grupa permutací n prvků se značí S_n a říká se jí *symetrická grupa* řádu n. Platí, že libovolná konečná grupa se dá realizovat jako podgrupa symetrické grupy vhodného řádu.

Cyklus délky n je permutace typu $\pi(i_1) = i_2, \pi(i_2) = i_3, \dots \pi(i_n) = i_1$. Cykly zapisujeme též seznamem $(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Cyklem je z výše uvedených pouze složená permutace $\pi_2 \circ \pi_1$, je možné jej zapsat např. jako (13425). Ostatní permutace jde alespoň rozložit na složení(=součin) cyklů: $\pi_1 = (142)(35)$. Rozklad je jednoznačný, i když v jeho zápisu je možné psát cykly v libovolném pořadí a uvnitř cyklů čísla cyklicky protáčet. Cykly délky 1 (*samodružné prvky*) se obvykle nepíší, takže $\pi_2 = (1543)$. Všimněme si, že v těchto rozkladech různé cykly působí na disjunktních množinách čísel, takovým se říká *nezávislé* a zjevně komutují.

Cyklům délky 2 se říká *transpozice* a jelikož $(i_1, i_2, \dots, i_n) = (i_1, i_k)(i_1, i_{k-1}) \dots (i_1, i_2)$, je možné každou permutaci rozložit dokonce na součin transpozic. Tento rozklad už jednoznačný není, ale minimální počet transpozic v rozkladu je dobře definován. Dokonce platí, že rozklady dané permutace obsahují buď všechny sudý počet transpozic, nebo všechny lichý, a dělí tak permutace na dvě význačné poloviny, na *sudé* a *liché*. Pokud vynásobíme dvě sudé permutace, dostaneme zjevně zase sudou permutaci, takže sudé permutace tvoří podgrupu $A_n \subset S_n$, *alternující grupu*. *Znaménko* permutace je 1 pro sudé a -1 pro liché a dá se počítat trojím způsobem:

(1) $\operatorname{zn} \pi = (-1)^k$, kde k je počet transpozic v libovolném rozkladu.
(2) $\operatorname{zn} \pi = (-1)^p$, kde p je počet cyklů sudé délky v rozkladu na nezávislé cykly (cyklus liché délky=sudý počet transpozic $\rightarrow$ nepřispívá)
(3) $\operatorname{zn} \pi = \prod_{i>j} \frac{\pi(i)-\pi(j)}{i-j}$. Počtu (-1)-ček ve výrazu vpravo se říká *počet inverzí* a znamená počet dvojic i, j, které permutace "překříží". Např. pro π_1 je 4 v inverzi s těmi čísly ve spodním řádku napravo od ní, která jsou menší než 4, tedy 1, 2, 3. 1 tedy s ničím (dalším), 5 s 2, 3 a 2 a 3 už s ničím. Celkem 5 inverzí, tudíž lichá permutace. Na druhé straně π_1 je součinem cyklů délky 2 a 3, tedy jeden cykl sudé délky a tedy skutečně $\operatorname{zn} \pi_1 = -1$.

Determinant matice A typu (n, n) je definován

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{zn} \pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)},$$

např. pro $n = 2$ toto znamená

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left[\operatorname{zn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] a_{11} a_{22} + \left[\operatorname{zn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right] a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Pro matice 3×3 (jinde neplatí!) se těší oblibě tzv. Sarussovo pravidlo:

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \;\; \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} \\ \\ \quad - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{23} a_{32} a_{11} - a_{33} a_{12} a_{21} \end{array}$$

tj. po dopsání první a druhé řádky pod matici bereme s plusem součiny trojic podél diagonál zleva nahoře doprava dolů a s minusem podél diagonál zprava nahoře doleva dolů.

Výpočet podle definice je pro vyšší n zdlouhavý, protože suma obsahuje $|S_n| = n!$ členů. Podobně jako u elementárních úprav matic soustavy rovnic, které zachovávají množinu řešení, můžeme najít úpravy, které zachovávají determinant.

Všimněme si, že $\det A = \det A^T$. To protože

$$\sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{zn} \pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} = \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{zn} \pi) a_{\pi^{-1}(1)1} a_{\pi^{-1}(2)2} \dots a_{\pi^{-1}(n)n} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{zn} \pi^{-1}) a_{\pi^{-1}(1)1} a_{\pi^{-1}(2)2} \dots a_{\pi^{-1}(n)n} = \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{zn} \pi) a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \dots a_{\pi(n)n} = \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{zn} \pi) a^T_{1\pi(1)} a^T_{2\pi(2)} \dots a^T_{n\pi(n)}$$

Další pozorování je, že matice se dvěma stejnými řádky (i-tý a j-tý) má determinant nulový. Permutaci π přiřadíme permutaci π', pro niž $\pi'(i) = \pi(j)$, $\pi'(j) = \pi(i)$ a $\pi(k) = \pi'(k)$ pro $k \neq i, j$. π a π' se liší pouze složením s transpozicí (i, j), mají tedy opačné znaménko. Takto můžeme spárovat všechny permutace. Navíc

$$a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(i)} \dots a_{j\pi(j)} \dots a_{n\pi(n)} \quad = \quad a_{1\pi'(1)} \dots a_{i\pi'(j)} \dots a_{j\pi'(i)} \dots a_{n\pi'(n)} \quad = \quad a_{1\pi'(1)} \dots a_{j\pi'(j)} \dots a_{i\pi'(i)} \dots a_{n\pi'(n)},$$

takže sčítance příslušející π a π' se navzájem odečtou.

Do třetice

$$(1) \quad \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{zn} \pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)} + \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{zn} \pi) a_{1\pi(1)} \dots a'_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)} = \sum_{\pi \in S_n} (\operatorname{zn} \pi) a_{1\pi(1)} \dots (a_{i\pi(i)} + a'_{i\pi(i)}) \dots a_{n\pi(n)},$$

takže determinant matice mající jako i-tý řádek vektor $a_{i*} + a'_{i*}$ je roven součtu determinantů matic, které mají tamtéž a_{i*} resp. a'_{i*} a všude jinde jsou stejné. Z toho vyplývá, že determinant se nezmění, pokud k řádku přičtu jiný řádek téže matice, případně lineární kombinaci řádků. Vynásobení řádku číslem má ovšem za následek, že se tímtéž číslem vynásobí i determinant. Obojí pochopitelně platí i pro sloupce. Těmito transformacemi lze matici převést na nějakou Jordanovu matici, jejíž determinant je nenulový, jen když neobsahuje nulové řádky. Tehdy je to ale matice jednotková a pro tu je v sumě definující determinant jen jeden nenulový sčítanec $a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = 1.1. \dots 1 = 1$.

Shrnuto: determinant se dá počítat pomocí Gaussovy eliminace, jen je potřeba při násobení řádku číslem započíst, že se násobí i determinant. Pozor, výměna dvou řádků obsahuje násobení -1 a tedy mění znaménko determinantu.

Označme $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ tzv. *algebraický doplněk* prvku a_{ij} matice A, kde M_{ij} je determinant matice vzniklé vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.

LEMMA 1. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \det A$

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve $i = j$, dokazujeme tedy $\det A = \sum_k a_{ik} A_{ik}$. Vytkněme v definici determinatu z každého sčítance ten jediný prvek i-tého řádku, který tam je:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{\pi, \pi(i)=k} \operatorname{zn} \pi a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots \widehat{a}_{i\pi(i)} \ldots a_{n\pi(n)}, \tag{2}$$

kde stříška znamená, že daný člen v součinu chybí. Permutaci π lze obložit transpozicemi, takže pokud např. $i = 5$, $\pi(5) = 7$, platí

$$\operatorname{zn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \mathbf{7} & 8 \end{pmatrix} = (-1)^{5-1} (-1)^{7-1} \operatorname{zn} \begin{pmatrix} \mathbf{5} & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \mathbf{7} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

nebo obecně $\operatorname{zn} \pi = (-1)^{i+k} \operatorname{zn} \pi'$, kde π' je permutace vzniklá po vyškrtnutí i nahoře, k dole a přečíslování zachovávajícím pořadí. Označíme-li $M(i,k)$ matici A, kde je analogicky vyškrtnut i-tý řádek, k-tý sloupec a ostatní řádky a sloupce přečíslovány, dostáváme z (**??**)

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{i+k} \sum_{\pi'} \operatorname{zn} \pi' m_{1,\pi'(1)} m_{2,\pi'(2)} \ldots m_{n-1,\pi'(n-1)} = \sum_{k=1} a_{ik} (-1)^{i+k} \det M(i,k) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

Pokud $i \neq j$, je zřejmé, že $\sum_k a_{ik} A_{jk}$ nezávisí na elementech v j-tém řádku, takže výsledek musí být stejný i pokud do tohoto řádku napíšeme např. stejné prvky jako jsou v i-tém řádku. Pak ale $\sum_k a_{ik} A_{jk} = \sum_k a_{jk} A_{jk}$. To je podle výše uvedeného rovno determinantu, ovšem matice se dvěma stejnými řádky, tedy nule. □

Tento výsledek se označuje jako *rozvoj determinantu podle i-tého řádku*. Podobně lze determinant rozvíjet podle j-tého sloupce. Zároveň dostáváme, že $b_{ij} = A_{ji} / \det A$ splňuje $\sum a_{ij} b_{jk} = \delta ik$, takže (b_{ij}) je inverzní matice k A. Takové vyjádření je velmi výhodné tehdy, pokud potřebujeme jen jeden konkrétní element inverzní matice, která jako celek může být třeba velká a obtížně spočitatelná. Pozor - v definici b_{ij} se vyskytuje A_{ji}, vyškrtává se tedy j-tý řádek a i-tý sloupec.

Samostatnou kapitolou je počítání determinantů obecného řádu n. Kromě převodu na trojúhelníkový tvar existuje několik dalších metod, jak se s nimi vypořádat. Nebudeme je popisovat zde, protože jsou dostatečně dobře popsány v kapitole 8 sbírky Používáme lineární algebru, která je dostupná na síti.

VĚTA 0.1. *Hodnost matice A je rovna rozměru jeho největšího nenulového subdeterminantu.*

DŮKAZ. Beze změny hodnosti můžeme v matici přeuspořádat řádky a sloupce tak, aby v prvních $n = h(A)$ řádcích a sloupcích byla báze řádkového resp. sloupcového prostoru. Pak ale dostáváme v levém horním rohu regulární podmatici řádu n, která má nenulový determinant. Kdyby měl být nenulový nějaký větší determinant, musel by mít lineárně nezávislé řádky a lineárně nezávislé by byly i odpovídající řádky matice A. Pak by ale hodnost musela být větší než n. □

VĚTA 0.2. $\det(AB) = \det A \det B$

DŮKAZ. Řádky matice AB jsou lineární kombinace řádků matice B. Podle (**??**) můžeme $\det AB$ rozložit na lineární kombinaci determinantů

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} b_{k,2} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} b_{k,n} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2,k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2,k} b_{k,2} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{2,k} b_{k,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} b_{k,2} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} b_{k,n} \end{vmatrix} = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{1,k_1} a_{2,k_2} \ldots a_{n,k_n} \begin{vmatrix} b_{k_1,1} & b_{k_1,2} & \ldots & b_{k_1,n} \\ b_{k_2,1} & b_{k_2,2} & \ldots & b_{k_2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{k_n,1} & b_{k_n,2} & \ldots & b_{k_n,n} \end{vmatrix}$$

Budou-li v determinantu dva řádky stejné, bude nulový, stačí tedy sumovat jen přes permutace $\pi(i) = k_i$. Potom můžeme proházet řádky tak, aby v každém členu vznikl $\det B$, tím se vytkne z každého determinantu $\operatorname{zn} \pi$. To je ale přesně znaménko, které potřebujeme k součinům $a_{1,k_1} a_{2,k_2} \ldots a_{n,k_n}$, abychom v nich poznali sčítance v definici $\det A$. □

Z této věty vidíme, že $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ a opět, že matice má nenulový determinant právě když má inverzní matici.

Cramerovo pravidlo je aplikací determinantu na lineární soustavy rovnic. Pokud $Ax = b$, pak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \sum a_{1i} x_i \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \sum a_{2i} x_i \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \sum a_{ni} x_i \end{vmatrix} = x_n \det A$$

díky (**??**) aplikovanému na poslední sloupec. Pak ale $x_n = \frac{\det A(n,b)}{\det A}$, kde $A(n,b)$ je matice, v níž byl n-tý sloupec nahrazen vektorem pravých stran b. Podobně samozřejmě pro $i \neq n$.

Díváme-li se na řádky matice 3×3 jako na vektory v trojrozměrném prostoru, udává determinant objem rovnoběžnostěnu vytýčeného těmito vektory, podobně pro řád $n > 3$. Důkaz je zadán jako cvičení. Pokud se na matici B díváme jako na n sloupcových vektorů a na A jako na lineární zobrazení těchto vektorů, jehož výsledkem jsou sloupce matice AB, pak $\det(AB) = \det A \det B$ znamená, že právě zobrazení s jednotkovým determinantem zachovávají objem rovnoběžnostěnu vytýčeného sloupci A. To má aplikace při vícerozměrné integraci, což není nic jiného než sčítání infinitezimálních objemů. Podobně názorně vidíme, že matice s determinantem nula rovnoběžnostěn "splácnou".