Gaussova eliminace a řešení soustav lineárních rovnic

Uvažujme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 3x + 2y - 2z &= 3 \\ 2x + 5y - 5z &= 2 \end{aligned} \tag{1}$$

Mohli bychom ji řešit tím, že bychom si například vyjádřili z první rovnice $x = 4 - 2y - z$ a dosadili do zbylých. Systematičtější a mnohem přehlednější metodu však nalezneme, když si položíme následující otázku: jaké jiné soustavy mají stejné řešení? Těch je jistě mnoho, ale dvě třídy takových soustav se přímo nabízejí. Můžeme jistě libovolnou rovnici v soustavě přenásobit nenulovým číslem a trojice (x_0, y_0, z_0) bude řešením například soustavy

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 2z &= 8 \\ 3x + 2y - 2z &= 3 \\ 2x + 5y - 5z &= 2 \end{aligned} \tag{2}$$

právě tehdy, byla-li řešením soustavy (1). Druhou jednoduchou úpravou je přičtení libovolné rovnice ke zvolené rovnici, čímž vznikne např.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 4x + 4y - z &= 7, \\ 2x + 5y - 5z &= 2 \end{aligned} \tag{3}$$

kde jsme přičetli první rovnici ke druhé. Opět je libovolná trojice čísel řešením soustavy (1), právě když je řešením (3). Poslední ingrediencí lahůdky zvané Gaussova eliminace je potom pozorování, že soustavy typu

$$\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 3 \\ z &= 2 \end{aligned} \tag{4}$$

se řeší zvlášť jednoduše ;-).

Bývá zvykem zavést zjednodušenou notaci pomocí *matice soustavy.* Místo (1) píšeme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 2 \end{array}\right), \tag{5}$$

čímž jsme se zbavili veškerého balastu plusů, rovnítek a proměnných, které bychom při úpravách jen opisovali. Povolíme si pouze dva typy úprav matice, násobení řádku nenulovým číslem a přičtení řádku nebo jeho násobku k jinému řádku, případně ještě prohození dvou řádků mezi sebou. Těmito *ekvivalentními úpravami* se pokusíme převést soustavu na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right), \tag{6}$$

který odpovídá soustavě (4) a z nějž ihned vidíme, že trojice (a, b, c) je řešením této a tedy i původní soustavy.

Potřebujeme takové úpravy, po nichž budou před svislou čarou přibývat nuly. Je zřejmé, že můžeme (-3)-násobek prvního řádku přičíst ke druhému řádku a získat tak nulu v druhé položce prvního sloupce. Podobně přičtení (-2)-násobku prvního řádku ke třetímu dá nulu ve třetí položce prvního sloupce:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -9 \\ 2 & 5 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \end{array}\right). \tag{7}$$

Vynulovali jsme první sloupec. Nyní stejný postup aplikujeme na druhý a třetí řádek, abychom vynulovali druhý. Abychom se vyhnuli počítání se zlomky, prohodíme druhý řádek se třetím.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & -4 & -5 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -33 & -33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \tag{8}$$

Nejprve jsme přičetli čtyřnásobek druhého řádku ke třetímu, poté třetí řádek vynásobili $-\frac{1}{33}$. Tím jsme převedli matici soustavy na *horní trojúhelníkový tvar.* Přičtení vhodného násobku třetího řádku k prvnímu a druhému převádí soustavu na

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \tag{9}$$

a přičtení (-2)-násobku druhého řádku k prvnímu dává

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \tag{10}$$

a vidíme, že řešením je $(1, 1, 1)$.

Tímto algoritmem můžeme řešit libovolně velké soustavy lineárních rovnic a můžeme ho též snadno naprogramovat. Při počítání v ruce bývá snazší po dosažení horního trojúhelníkového tvaru řešení dopočítat dosazováním. Prohození druhého a třetího řádku, které jsme v průběhu výpočtu provedli, je příkladem hledání nejvhodnějšího *pivota* pro daný cyklus Gaussovy eliminace. Jeho volba může mít vliv nejen na obtížnost aritmetických operací, ale v případě počítačového programu též na velikost numerické chyby.

V případě soustavy (1) jsme dospěli k jedinému řešení, ale příklad

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{11}$$

ukazuje, že někdy může být řešení nekonečně mnoho ($x = t, y = t - 2,\ t \in \mathbb{R}$) a příklad

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \tag{12}$$

zase, že někdy nemusí existovat žádné. Jak to poznat?

Podívejme se na speciální typy soustav, zvané *homogenní*. Takové soustavy mají na pravé straně samé nuly. Protože žádná ekvivalentní úprava na tom nemůže nic změnit, pravá strana se do matice vůbec nepíše a rovná čára jakbysmet. Soustava s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

má řešení $x = 2t,\ y = t,\ z = 0$ a další úpravy ve smyslu Gaussovy eliminace již nejsou možné. Vidíme, že počet parametrů, které je nutno zavést do řešení, je roven počtu řádek, které se podaří Gaussovou eliminací vynulovat. Pokud je tento počet nulový, má homogenní soustava pouze *triviální řešení* $(0, 0, 0)$.

Budiž pravá strana např. $(-1, 1, 0)$. Pokud (x_P, y_P, z_P) řeší soustavu s touto pravou stranou a (x_H, y_H, z_H) řeší homogenní soustavu, pak

$$\begin{aligned} 1.(x_P + x_H) - 2(y_P + y_H) + 0.(z_P + z_H) = 1.x_P - 2y_P + 0.z_P + 1x_H - 2y_H + z_H = \\ = x_P - 2y_P + 0.z_P + 0 = -1 \end{aligned}$$

a podobně pro druhou a třetí rovnici soustavy. Tedy i $(x_P + x_H, y_P + y_H, z_P + z_H)$ řeší rovnici s pravou stranou. Například $(3, 2, -1)$ je jedno z řešení nehomogenní soustavy, potom $(3, 2 + t, -1 + 2t)$, pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ je řešením téže nehomogenní soustavy. Platí dokonce, že takto lze vyjádřit všechna řešení nehomogenní soustavy. *Obecné řešení* nehomogenní soustavy je tedy součtem libovolného *partikulárního řešení* (x_P, y_P, z_P) a nějakého řešení homogenní soustavy.

Nehomogenní soustavy nemající řešení jsou právě ty, které jsou převoditelné na

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & & & \\ & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 1 & \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & \\ \vdots & & & & & \vdots & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{14}$$