Lineární formy

Definice 1.

- *Lineární forma* je homomorfizmus $f: V \to T$, kde V je VP nad T.
- *Triviální* je LF právě když je to nulová funkce.
- Je-li V_n vektorový prostor konečné dimenze a M jeho báze, pak $(\exists r_i \in T)(\forall u \in V_n)(f(u) = \sum_1^n r_i x_i)$, kde $(x_1, \ldots, x_n)$ jsou souřadnice u vzhledem k M. Tomuto zápisu říkáme *analytické vyjádření* LF f vzhledem k M a číslům r_i pak *koeficienty analytického vyjádření*, souhrnně je značíme $\{f\}_M$.
- Prostor všech lineárních forem na V se nazývá *duální prostor* a značí se $\tilde{V}$
- Báze $\tilde{M} = (f_1, \ldots, f_n)$ VP $\tilde{V}$ se nazývá duální bází k $M = (u_1, \ldots, u_n)$, právě když $\forall i, j \quad f_i(u_j) = \delta_{ij}$.
- *Nulová množina* LF je $W \subset V$ taková, že $(\forall u \in W)(f(u) = 0)$. Značí se $\operatorname{Ker} f$.

Poznámka 1.

(1) Pokud do formy $f = \sum r_i x_i$ dosadíme bázový vektor u_j (mající souřadnice $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$), pak dostaneme r_j. Takto je tedy možné získat rychle koeficienty analytického vyjádření.
(2) Koeficienty analytického vyjádření $\{f\}_M$ se rovnají souřadnicím vůči duální bázi $\{f\}_{\tilde{M}}$. Podle předchozího bodu $f(u_j) = r_j$, kde $u_j \in M$. Na druhou stranu, pokud píšeme $f = \sum s_i f_i$, kde $\tilde{M} = \{f_1, \ldots, f_n\}$, pak $f(u_j) = s_j$. Musí tedy platit $r_j = s_j$.
(3) Přejdeme-li od báze M k bázi M' maticí přechodu A, víme že $x_i = \sum a_{ij} x'_j$. Musí platit $\sum r'_i x'_i = \sum r_i x_i = \sum r_i a_{ij} x'_j$ pro libovolný vektor se souřadnicemi $(x_1, \ldots, x_n)$. a tedy se musejí rovnat všechny koeficienty u x'_j. Souřadnice vzhledem k duální bázi se tedy transformují vztahem $r'_i = r_i a_{ij}$ neboli matice přechodu od $\tilde{M}$ k $\tilde{M}'$ je $(A^{-1})^T$. Někdy se používá pojem *kontragredientní matice* k A.
(4) Nulová množina LF je dána v libovolných souřadnicích jako řešení soustavy rovnic sestávající z jediné rovnice $\sum r_i x_i = 0$, je to tedy VP. Pro triviální LF je řešením celé V, pro netriviální musí být dimenze prostoru řešení rovna $n-1$. Takovým prostorů se říká *nadroviny*. Ke každé nadrovině existuje LF, která ji má jako nulovou množinu. Navíc je tato LF určena jednoznačně až na násobek.

Příklady lineárních forem:

(1) Typickou LF na $\mathbb{R}^3$ je například $f(u) = x_1 + 2x_2 - 5x_3$. Její nulovou množinou je $\langle(-2, 1, 0), (5, 0, 1)\rangle$. Pokud napíšeme do řádků matice F vektory nějaké báze $\mathbb{R}^3$, pak z $FF^{-1} = E$ plyne, že vektory duální báze budou tvořit sloupce inverzní matice. Pozor, duální báze je bází $\tilde{V}$, nikoliv V. Je třeba tyto prostory odlišovat a nenechat se zmást tím, že ve speciálním případě $\mathbb{R}^3$ je můžeme snadno ztotožnit!
(2) Zobrazení f_i, které vektoru přiřadí i-tou souřadnici vzhledem k M, je také LF. Právě tyto f_i tvoří duální bázi k M.
(3) Na prostoru konvergentních posloupností je zobrazeni lim (limita posloupnosti) LF.
(4) Na prostorech funkcí existuje mnoho lineárních forem, např $f \to f(a)$, která přiřadí funkci její hodnotu ve zvoleném bodě, nebo $f \to f'(a)$ a samozřejmě i vyšší derivace či jejich lineární kombinace. Samostatnou kapitolou jsou lineární formy tvaru $f \to \int_a^b f(x)\mu(x)dx$, které mohou odpovídat například přiřazení elektrostatického potenciálu v daném bodě nějaké nábojové hustotě v prostoru. Lineárním formám na prostorech funkcí se obvykle říká distribuce.

Definice 2. Buď φ endomorfizmus V. *Duálním endomorfizmem k φ nazýváme zobrazení $\tilde{\varphi}: \tilde{V} \to \tilde{V}$ definované předpisem* $(\tilde{\varphi}(f))(u) = f(\varphi(u))$.

Jestliže tedy zadáme φ v souřadnicích jako $y_i = \sum a_{ij} x_j$, kde A je matice homomorfizmu vzhledem k M, a označíme B matici $\tilde{\varphi}$ vzhledem k $\tilde{M}$ ($s_i = \sum b_{ij} r_j$), pak podle definice musí být $\sum_i (\sum_j b_{ij} r_j) x_i = \sum_i r_i (\sum_j a_{ij} x_j)$ a tedy $B = A^T$.

Vidíme, že ke každému objektu prostoru V máme objekt duální - k bázi máme duální bázi, k endomorfizmu duální endomorfizmus. Jednorozměrné podprostory ve $\tilde{V}$ je možné chápat jako duál k nadrovinám ve V. Podobně libovolnému $n-k$-rozměrnému prostoru $W \subset V$ je možné jendoznačně přiřadit k rozměrný prostor lineárních forem, jimž je W společnou nulovou množinou. Mezi konečně rozměrnými V a $\tilde{V}$ existuje izomorfizmus, například ten, který bázovému vektoru u_i přiřadí f_i z duální báze. Tento izomorfizmus je ale spjat s volbou báze. Naproti tomu mezi dvojitým duálem $\tilde{\tilde{V}}$ a prostorem V existuje izomorfizmus definovaný vztahem $X \to x \Leftrightarrow X(f) = f(x)$, který nezávisí na volbě báze, je tzv. *přirozený* a udává nám ztotožnění $\tilde{\tilde{V}}$ a V.