# Lineární zobrazení

Definice 1. Zobrazení $f : V \to V'$ je *homomorfizmus* (=lineární zobrazení), pokud $f(u+v) = f(u) + f(v)$, $f(ru) = rf(u)$.

- *monomorfizmus* - prostý(injektivní) homomorfizmus.
- *epimorfizmus* - homomorfizmus na $V'$ (surjektivní).
- *izomorfizmus* - mono + epi
- *jádro* - $\operatorname{Ker} f = \{u \in V | f(u) = 0\}$. Mono $\equiv \operatorname{Ker} f = 0$.
- *obraz* - $\operatorname{Im} f = \{v \in V' | \exists u \in V f(u) = v\}$. Epi $\equiv \operatorname{Im} f = V'$.
- *hodnost homomorfizmu* - $h(f) = \dim \operatorname{Im} f$.
- *endomorfizmus* - $f : V \to V$ čili $\operatorname{Dom}(f) = \operatorname{Rng}(f) = V$.
- *automorfizmus* - endo + izo
- *identita* - $1_V : V \to V$, $1_V(u) = u$. Je to automorfizmus.
- *inverzní homomorfizmus* - $f^{-1} : V' \to V$, $f^{-1} \circ f = 1_V$. Existuje právě když $f$ izo.

Příklad 1. Několik příkladů homomorfizmů

- $y = Ax$, $x \in T^n$, $y \in T^m$, $A \in M_{mn}(T)$.
  - mono $\Leftrightarrow$ sloupce $A$ LN.
  - epi $\Leftrightarrow$ sloupce $A$ generují celé $T^m$.
  - izo $\Leftrightarrow m = h(A) = n$ - tedy i auto.
  - jádro $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} A$ a obraz $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} A$.
  - identita - jednotková matice, skládání homomorfizmů - násobení matic, inverzní homomorfizmus - inverzní matice
- $V = T^3$, $V' = T^2$, $P_{(x,y)} : (a_1, a_2, a_3) \to (a_1, a_2)$. Toto zobrazení se vyznačuje vlastností $P^2_{(x,y)} = P_{(x,y)}$, tzn. je to *projekce*. Obecněji zobrazení $V$ na podprostor $V'$ dané nějakým geometrickým průmětem.
- Inkluze $T^n \subset T^m$, $n < m$ definuje monomorfizmus $i : (x_1, \dots, x_n) \to (x_1, \dots, x_n, 0 \dots, 0)$.
- $V = T^n$, $V' = T$, $a_2, a_3, \dots a_n \in T^n$. Zobrazení $f : x \to \det[x, a_2, a_3, \dots .a_n]$, kde $[\dots]$ značí matici $n \times n$, jejíž řádky jsou tvořeny vektory uvnitř závorek, je epimorfizmus. $\operatorname{Ker} f = \langle a_2, \dots, a_n \rangle$, pokud $a_i$ jsou LN a celé $V$ pokud LZ.
- $V = \{$ množina všech konvergentních posloupností $\}$, $V' = \mathbb{R}$. $\lim : V \to \mathbb{R}$ je epimorfizmus.
- $V = (\mathbb{R}, +, \cdot)$, $V' = (\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$, kde $u \oplus v = uv$ a $r \odot u = u^r$, pak $\exp : u \to e^u$ je izomorfizmus a $\exp^{-1} = \ln$.
- $V = C(-\infty, \infty)$, $V' = \mathbb{R}$. $E_a : f \to f(a)$ je epi.
- $V = C^\infty(a, b) = V'$, $D^{(n)}; f \to f^{(n)}$ je epi a jeho jádrem je množina polynomů stupně mešího než $n$.
- $V = L(a, b)$, $V' = \mathbb{R}$, $I_{(a,b)} : f \to \int_a^b f(x)dx$ je epi.

Zejména na nekonečnědimenzionálních VP se lineární zobrazení titulují též slovem *operátor*. Naopak pojem homomorfizmu bývá používán v řadě jiných algebraických struktur pro zobrazení, zachovávající podstatné rysy těchto struktur.

Věta 0.1. *Buď $M$ báze $V$ a $F : M \to V'$ nějaké zobrazení. Pak*

(1) *Existuje jediný homomorfizmus $f : V \to V'$, že $f|M = F$.*
(2) *$f$ je izo, právě když je $F(M)$ báze $V'$.*

Toto tvrzení říká, že homomorfizmus $f$ je určen svými hodnotami na libovolně zvolené bázi $\{u_i\}$. Jeho hodnotu na $u = \sum_i r_i u_i$ dodefinujeme jako $f(u) = \sum_i r_i F(u_i)$ a zbývá jen ověřit jednoznačnost.

Věta 0.2. *Buď $f : V \to V'$.*

(1) *Je-li $W$ doplněk* $\operatorname{Ker} f$ *ve $V$, pak $f|W$ je mono.*
(2) $\operatorname{Im} f = f(W)$
(3) $\dim Ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$, *pokud $dim V = n$.*

Pokud $\dim V = n$, definuje libovolná báze $M = \{u_1, \dots, u_n\}$ izomorfizmus $f : V \to T^n$, $f(\sum r_i u_i) = (r_1, \dots, r_n)$. Číslům $r_i$ se říká *souřadnice* $u$ vzhledem k bázi $M$, značíme $\{u\}_M$ a podle zvolené konvence je píšeme jako řádkové vektory. Odtud je jasné, že dva konečněrozměrné VP jsou izomorfní, právě když se rovnají jejich dimenze.

Pokud chceme počítat s homomorfizmem $f : V \to V'$ konkrétně, nezbývá než zvolit ve $V$ bázi $M$, ve $V'$ bázi $M'$ a vyjadřovat vektory v odpovídajících souřadnicích. Homomorfizmus pak bude vyjádřen tzv. *maticí homomorfizmu* $a_{ij} = (f(u_j))_i$, tedy platí

$$\{f(u)\}_{M'} = \{u\}_M.A^T.$$

Dosadíme-li za $u$ postupně vektory báze $M$, dostáváme napravo součiny $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).A^T$, což jsou jednotlivé sloupce matice $A$(řádky $A^T$). Podle levé strany v $i$-tém sloupci tedy jsou souřadnice $f(u_i)$ vzhledem k bázi $M'$. V indexech můžeme psát $y_i^{M'} = a_{ij} x_j^M$, kde $x_j^M$ jsou souřadnice $u$ vzhledem k $M$ a $y_i^{M'}$ souřadnice $f(u)$ vzhledem k $M'$. Přiřazení $f \to A$ je vlastně zobrazením $\operatorname{Hom}(V, V') \to T^{m,n}$ vektorového prostoru homomorfizmů do vektorového prostoru matic.

Pokud zvolíme jiné báze $N$ místo $M$ a $N'$ místo $M'$, matice homomorfizmu se změní. Tato změna je zakódována v *matici přechodu* $A$ od $M$ k $N$, resp. od $M'$ k $N'$, která splňuje $x_i^M = \sum_j a_{ij} x_j^N$, kde $x_i^M$ a $x_i^N$ jsou souřadnice jednoho libovolného vektoru $u$ vůči dvěma různým bázím. Platí tedy

$$\{u\}_M = \{u\}_N.A^T.$$

Matice přechodu od $N$ k $M$ je $A^{-1}$.

Označme tedy $A$ matici přechodu od $M$ k $N$, $B$ matici homomorfizmu $f$ vzhledem k $M$ a $M'$ a $C$ matici přechodu od $M'$ k $N'$.

$$y_i^{N'} = (C^{-1})_{ij} y_j^{M'} = (C^{-1})_{ij} B_{jk} x_k^M = (C^{-1})_{ij} B_{jk} A_{kl} x_l^N,$$

takže matice homomorfizmu vzhledem k $N$ a $N'$ je $C^{-1}BA$. Často $f$ je endo a $M = M'$, $N = N'$. tehdy matice $f$ vzhledem k $N$ je $D \equiv A^{-1}BA$, kde $B$ je matice $f$ vzhledem k $M$.

Matice $D$ a $B$ spjaté takovouto relací pro nějakou regulární $A$ se nazývají *podobné*. Vzhledem k tomu, že vyjadřují týž homomorfizmus, jen v různých bázích, očekáváme, že se řada jejich vlastností bude "podobat". Např. se rovnají hodnosti, díky větě o součinu determinantů $\det A^{-1}BA = \det A^{-1} \det B \det A = \det B$. Obecně uvažujme výraz $\det(B - \lambda E)$, kde $E$ je jednotková

matice a $\lambda$ je číslo. Z definice determinantu vidíme, že je to polynom stupně $n$. kde $n$ je rozměr matice $B$, nazývaný *charakteristický polynom* matice $B$. Tento polynom je také invariantní vůči podobnostní transformaci, tedy i všechny jeho koeficienty a kořeny jsou invariantní.