Matice

Matice $A \equiv (a_{ij})$ typu (m,n) nad tělesem T je tabulka

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{array}\right),$$

kde $a_{ij} \in T$. Matice typu (m,n) tvoří vektorový prostor $M_{mn}(T)$ vzhledem k násobení číslem $rA = (ra_{ij})$ a sčítání $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Obě operace se provádějí po složkách a M_{mn} je tedy totéž jako aritmetický VP $T^{m \cdot n}$. *Diagonála* matice jsou prvky a_{ii}, *čtvercová matice* má $m = n$ a *diagonální matice* je čtvercová, která má mimo diagonálu nuly. *Jednotková matice* E má na diagonále samé jednotky a jinde nuly. Píše se pro ni též symbol δ_{ij}, *Kroneckerovo delta.*

Matice lze násobit metodou "řádek krát sloupec". Pro matice typu $(2,2)$ to vypadá takto:

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} e & f \\ g & h \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{array}\right)$$

a obecně je na políčku ij součinu hodnota $\sum_k a_{ik}b_{kj}$. Takový součin je tedy definován jen pokud A má tolik sloupců, kolik B řádek, navíc není komutativní $AB \neq BA$. To je ale příznivé pro reprezentování algebraických struktur pomocí matic. Komplexní číslo $a + ib$ můžeme reprezentovat reálnou maticí

$$A(a,b) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array}\right),$$

pro niž bude platit $A(a,b)A(c,d) = A(ac - bd, ad + bc)$, takže součin v maticové reprezentaci dává stejný výsledek jako normální násobení komplexních čísel $(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$. Podobně kvaternion $a+ib+jc+kd$ lze reprezentovat komplexní maticí

$$A(a,b,c,d) = \left(\begin{array}{cc} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{array}\right).$$

Dvě takovéto matice už nekomutují, stejně jako obecně nekomutují dva kvaterniony.

Množina čtvercových matic $M_{nn}(T)$ se sčítáním a násobením splňuje všechny axiomy tělesa až na existenci inverzních prvků k násobení. Je to tedy *okruh.*

Speciální případ maticového násobení je $y = Ax$, kde $A \in M_{nn}(T)$, $x \in M_{n1}(T) \equiv T^n$. Výsledek y je opět v $M_{n1}(T) \equiv T^n$, navíc $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ a $A(rx_1) = r(Ax_1)$, takže násobení maticí A definuje lineární zobrazení z T^n do T^n. *Jádrem* $\operatorname{Ker} A$ tohoto zobrazení jsou všechny vektory x, pro něž $Ax = 0$, tedy ty, které řeší homogenní rovnici s maticí A. *Obrazem* $\operatorname{Im} A$ jsou všechny vektory $y = Ax$. Jádro i obraz jsou vektorové podprostory T^n. Navíc platí

Věta 0.1. $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = n$

Důkaz. Báze $\operatorname{Ker} A$ nechť je $(v_1, \dots, v_k)$, báze $\operatorname{Im} A$ budiž $(w_1, \dots, w_l)$. Existují $(v'_1, \dots, v'_l)$ takové, že $Av'_i = w_i$. Pro libovolný vektor v můžeme Av jednoznačně zapsat jako $\sum_i \lambda'_i w_i$. Protože ale $A(v - \sum_i \lambda'_i v'_i) = 0$, patří závorka do $\operatorname{Ker} A$ a dá se jednoznačně napsat jako $\sum_i \lambda_i v_i$. Tedy $v = \sum \lambda_i v_i + \sum \lambda'_i v'_i$, rozpis je jednoznačný a v_i s v'_i dohromady tvoří bázi, $k + l = n$. ☐

Číslo $\dim \operatorname{Im} A$ se nazývá *hodnost* $h(A)$ matice A a je rovno dimenzi lineárního obalu sloupců matice A, neboť $y = Ax$ není nic jiného než lineární kombinace sloupců matice A s koeficienty (x_i).

Transponovaná matice k $A = (a_{ij})$ je matice $A^T = (a_{ji})$. Jejími řádky jsou sloupce původní matice a naopak.

Věta 0.2. $h(A) = h(A^T)$

Důkaz. Označme $h_r(A) \equiv h(A^T)$ dimenzi lineárního obalu řádků matice A a $h_s(A) \equiv h(A)$ dimenzi lineárního obalu sloupců. Ukážeme, že $h_r(A) = h_s(A)$. Pokud je matice čtvercová a sloupce i řádky jsou lineárně nezávislé, jsme hotovi. Pokud ne, lze vybrat řádek či sloupec, který je lineární kombinací ostatních řádků, resp. sloupců. Označme A' matici vzniklou vynecháním tohoto např. sloupce. Pak zřejmě $h_s(A) = h_s(A')$, ale též $h_r(A) = h_r(A')$ (cvičení). Postupným vynecháváním závislých řádků a sloupců nakonec dostaneme čtvercovou matici s lineárně nezávislými řádky i sloupci a se stejnou h_r i h_s jako měla A. ☐

Transpozice součinu matic je $(AB)^T = (\sum a_{ik}b_{kj})^T = (\sum a_{jk}b_{ki}) = B^T A^T$.

Věta 0.3. $h(AB) \leq \min(h(A), h(B))$

Důkaz. i-tý řádkový vektor $C \equiv AB$ je lineární kombinací $c_{i*} = \sum a_{ik}b_{k*}$ řádkových vektorů B s koeficienty danými i-tým řádkem A. Tedy lineární obal řádků C je podprostorem lin. obalu řádků B a $h(C) \leq h(B)$. Analogicky, z $C^T = B^T A^T$ plyne $h(C^T) \leq h(A^T)$. ☐

Jak vidno, násobení matic AB je vlastně děláním lineárních kombinací řádků B, či naopak sloupců A. Děláním určitých lineárních kombinací jsou ale i elementární úpravy.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{array}\right) \tag{1}$$

je tedy reprezentací násobení 2. řádku číslem pomocí maticového násobení a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & 1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{pmatrix} = \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \sum_{i\neq 2} \lambda_i a_{i1} + a_{21} & \sum_{i\neq 2} \lambda_i a_{i2} + a_{22} & \dots & \sum_{i\neq 2} \lambda_i a_{in} + a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

reprezentuje přičítání ke 2.řádku lineární kombinace ostatních řádků.

Každou matici lze řádkovými úpravami převést na *Gaussovu matici*, tj. takovou, která má jedničky na pozicích a_{ii_j}, kde $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ a nuly všude "pod" tím, tj. na a_{ij}, $j > k$ (nulové řádky) a $i < i_j$ (nuly v řádcích před jedničkami). Zavádí se i pojem *Jordanova matice*, to je Gaussova, která má v i_j-tých sloupcích kromě a_{ii_j} už samé nuly. Opět lze na ni převést libovolnou matici. Speciálně vidíme, že matici typu (n, n) lze Gaussovou eliminací převést na jednotkovou matici tehdy a jen tehdy, má-li hodnost n. Takový převod se dá pomocí maticového násobení zapsat $M_1 M_2 \ldots M_p A = E$, kde M_i jsou matice typu (**??**) nebo (**??**). Součin $M = M_1 \ldots M_p$ má vlastnost $MA = E$ a nese tedy právem jméno *inverzní matice* a označení A^{-1}. Zároveň tato definice dává nejčastější postup výpočtu, při němž se vedle sebe napíší matice A a jednotková E a na obě se provádějí tytéž řádkové úpravy, až vznikne vlevo $MA = E$ a vpravo $ME = M$, tedy inverzní matice. Příklad:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

U matic 2×2 je lepší si pamatovat, že inverzní matice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

vznikne prohozením prvků na diagonále, ominuskováním prvků mimo diagonálu a vydělením *determinantem* matice $ad - bc$. Něco podobného platí i pro matice větších rozměrů, ale výpočet už je pracnější než metodou Gaussovy eliminace.

Matice, které mají inverzní matici (tj. mají maximální hodnost), se nazývají *regulární*, ostatní jsou *singulární*.