Minisbírka 2

Dril:

D1 Vytvořte tabulku pro sčítání a násobení v tělese $GF(2^3)$.
D2 Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé vektory $(2,3,-5)$, $(1,-1,1)$, $(3,2,-2)$ v $\mathbb{R}^3$.
D3 Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé vektory $(2,0,3)$, $(1,-1,1)$, $(0,-2,-1)$ v $\mathbb{R}^3$.
D4 Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé vektory $(1,-1,1,2)$, $(1,8,7,-7)$, $(1,2,3,-1)$, $(1,5,5,-4)$ v $\mathbb{R}^4$.
D5 Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé vektory $(2,1,-1,2,-1)$, $(-4,3,2,-1,1)$, $(3,5,-2,1,-2)$, $(2,2,-1,3,-1)$, $(-1,2,3,1,3)$ v $\mathbb{R}^5$.
D6 Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé vektory $(1+i,1-i,1+i)$, $(1-i,1+3i,i-1)$,$(1,1+i,i)$ v $\mathbb{C}^3$.
D7 Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé vektory $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ v $(\mathbb{Z}_2)^3$.
D8 Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé vektory $(4,0,1)$, $(1,3,4)$, $(3,2,1)$ v $(\mathbb{Z}_5)^3$.

Cvičení:

C1 (2b) Pro která $a \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(a,-4,-1),(4,-6,-3),(1,1,-a)$ lineárně nezávislé?
C2 (2b) Zjistěte, zda jsou vektory $2x-1, x-2, 3x$ vektorového prostoru $C\langle -1,1\rangle$ spojitých funkcí na intervalu lineárně závislé.
C3 (3b) Zjistěte, zda jsou vektory $x^2, x, 1, \frac{1}{x}$ vektorového prostoru $C\langle 1,10\rangle$ lineárně závislé.
C4 (1b) Zjistěte, zda jsou LN vektory $(0,2,6,3,6)$, $(2,3,4,5,4)$, $(3,1,2,3,6)$, $(6,5,1,3,5)$ v $(\mathbb{Z}_7)^5$.

Teorie:

T1 (4b) Dokažte, že pro libovolné $0 \neq r \in \mathbb{R}$ je $\mathbb{R}$ s operacemi

$$a \oplus b = a + b + \frac{1}{r} \qquad\qquad a \odot b = a + b + abr$$

těleso charakteristiky 0.
T2 (2b) Dokažte, že charakteristika tělesa je buď 0 nebo prvočíslo.
T3 (2b) Dokažte, že jsou-li $u_1, u_2, \dots u_n$ lineárně nezávislé vektory ve VP V nad T a $r_{ij} \in T, 1 \le i,j \le n$, pak vektory $s_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in}) \in T^n$ jsou lineárně nezávislé právě když jsou lineárně nezávislé vektory $v_i = \sum_1^n r_{ij} u_j$.

Ukázka:

D1 (2b) Z vektorů $(5,7,-1,3)$, $(1,-3,8,2)$, $(9,17,-10,4)$, $(-2,6,-16,-4) \in \mathbb{R}^4$ vyberte nějakou bázi jejich lineárního obalu.
D2 (3b) Zjistěte, kolik bází vektorového prostoru $\langle u_1, \dots, u_k\rangle$ lze vybrat z vektorů u_i, jestliže $u_1 + u_2 + \ldots + u_k = 0$, $k \ge 3$, $\dim V = k-1$.
D3 (2b) Najděte bázi $\langle (0,1,-3,4), (2,2,2,2), (1,-1,3,7)\rangle \subset \mathbb{R}^4$, obsahující vektor $(1,4,-4,-1)$.
D4 (2b) $V_1 = \langle 1,0,2,-3), (3,2,1,-5), (-1,2,1,-2)\rangle$, $V_2 = \langle (-3,0,2,0)\rangle$. Určete dimenzi $V_1 \cap V_2$.