Minisbírka 3

Dril:

D1 Z vektorů $(1,0,2,-3)$,$(3,2,1,-5)$,$(-1,2,1,-2)$, $(-3,0,2,0) \in \mathbb{R}^4$ vyberte bázi a vyjádřete ostatní vektory jako LK vektorů báze.

D2 Najděte bázi $\mathbb{R}^4$, která obsahuje $(1,2,3,4)$.

D3 Určete dimenzi $\langle(1,2,3,4),(1,5,1,2),(1,1,2,3)\rangle \subset \mathbb{R}^4$.

D4 Určete dimenzi $\langle(1+i,i-1,i),(1-i,1+3i,1+i),(1+i,1-i,1)\rangle \subset \mathbb{C}^3$.

D5 Určete dimenzi $\langle(4,4,2,3),(4,3,1,0),(1,2,2,3),(2,3,4,4)\rangle \subset \mathbb{Z}_5^4$.

D6 $V_1 = \langle(1,3,0,2),(2,0,1,3),(5,-3,3,1)\rangle$, $V_2 = \langle(3,-3,2,-2),(3,3,1,5),(2,0,1,1)\rangle$. Určete dimenzi $V_1 \cap V_2$.

D7 Spočtěte 3.mocninu matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

D8 Najděte všechny matice X, které komutují($AX = XA$) s

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

D9 Řešte maticovou rovnici $XB = A$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Cvičení:

C1 (2b) Z vektorů $(5,7,-1,3)$,$(1,-3,8,2)$,$(9,17,-10,4)$,$(-2,6,-16,-4)$ vyberte všechny báze jejich lineárního obalu.

C2 (2b) Určete, kolik bází $V = \langle u_1,\dots,u_9\rangle$ lze vybrat z množiny vektorů $\{u_1,\dots,u_9\}$, pokud $\dim V = 6$ a $u_1 = u_2 + u_3$, $u_4 = 2u_5 + u_6$, $u_7 = u_8 - 2u_9$.

C3 (3b) Podprostory T^n jsou definovány jako $V_1 = \{(x_1,\dots,x_n)|x_1+\dots+x_n = 0\}$ a $V_2 = \{(x_1,\dots,x_n)|x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$. Určete dimenze $V_1, V_2, V_1 \cap V_2, V_1 \vee V_2$.

C4 (3b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C5 (1b) Matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

napište jako součet symetrické ($A = A^T$) a antisymetrické matice ($A = -A^T$).

Teorie:

T1 (2b) Nechť pro podprostory V_1, V_2 platí $\dim(V_1 \vee V_2) = 1 + \dim(V_1 \cap V_2)$. Pak buď $V_1 \subset V_2$ nebo $V_2 \subset V_1$.

T2 (3b) Buďte W_1, W_2, W_3 podprostory V. Ukažte, že platí $W_1 \vee (W_2 \cap W_3) \subset (W_1 \vee W_2) \cap (W_1 \vee W_3)$ a obecně neplatí rovnost.

T3 (1b) Dokažte, že součin dvou matic typu $(2n, 2n)$, pokud je zapíšeme v blokovém tvaru pomocí matic $A_{ij}, B_{ij} \in M_{nn}$ je roven

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

T4 (1b) Nechť A, B jsou čtvercové matice téhož typu. Dokažte, že obecně $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

T5 (2b) Dokažte, že všechny matice

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ tvoří komutativní grupu k násobení a pokuste se najít její geometrický význam.

T6 (1b) Symetrická matice je taková, pro niž $A = A^T$, antisymetrická $A = -A^T$. Určete dimenzi prostoru symetrických a antisymetrických matic $n \times n$.

T7 (2b) Dokažte, že VP čtvercových matic řádu n je direktním součtem podprostoru symetrických a podprostoru antisymetrických matic.

Ukázka:

U1 (3b) Najděte dimenze prostorů V, W, $V \cap W$, $V \wedge W \subset \mathbb{R}^5$ v závislosti na parametru λ, kde $V = \langle(3,-1,-2,2,1)$, $(1,4,0,1,-1)$, $(\lambda,6,-4,6,0)\rangle$, $W = \langle(1,-3,2,-3,0), (0,0,0,1,1)\rangle$.

U2 (3b) Buďte W_1, W_2, W_3 podprostory V. Ukažte, že pokud $W_1 \subset W_3$, pak $W_1 \vee (W_2 \cap W_3) = (W_1 \vee W_2) \cap W_3$.

U3 (3b) Najděte dvě nenulové matice, pro něž $AB = 0$.

U4 (2b) Spočtěte součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

U5 (2b) Najděte matici splňující $A^2 = 0$, $A \neq 0$.

U6 (2b) Najděte dvě matice, pro něž $AB \neq BA$.

U7 (3b) Ukažte, že matice tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ tvoří těleso, které je izomorfní $\mathbb{C}$.

(1) (4b) Ukažte, že matice tvaru

$$\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tvoří těleso, které je izomorfní tělesu kvaternionů $\mathbb{H}$ a demonstrujte, jak se nekomutativita $\mathbb{H}$ obráží v jejich maticové reprezentaci.

U7 (4b) Najděte reprezentaci kvaternionů pomocí matic pouze s elementy z $\mathbb{R}$.