Minisbírka 4

Dril:

D1 Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

D2 Určete jádro a obraz matice v předchozí úloze.

D3 Určete jádro, obraz a hodnost komplexní matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+2i & 2i & 1 \\ 1-i & 1+3i & i-1 & 0 \\ 1+i & 1-i & 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

D4 Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 3563 & 3562 \\ 3562 & 3563 \end{pmatrix}$$

a zkuste při tom nepoužít kalkulačku ;-)

D5 Najděte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{Z}_7$.

Cvičení:

C1 (2b) Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 2 & -1 & x & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

v závislosti na $x \in \mathbb{R}$.

C2 (2b) Určete matici A, pro niž $\mathrm{Ker}\, A = \langle (0,2,3,4), (3,0,2,1), (2,1,2,1) \rangle$ a $\mathrm{Im}\, A = \langle (-1,2,1,3) \rangle$.

C3 (4b) Určete hodnost matice v závislosti na parametrech

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

C4 (4b) Najděte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

C5 (4b) Najděte komplexní matice $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ typu 2×2, splňující relace $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$, $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z = -\sigma_y \sigma_x$ (a cyklická záměna, tzv. Pauliho matice). Najděte řád grupy $P = \{\pm 1, \pm i\sigma_x, \pm i\sigma_y, \pm i\sigma_z\}$ (= nejvyšší řád prvku) a určete třídy konjugace (viz T7).

C6 (4b) Najděte inverzní matici v $GF(49)$, tedy tělese tvořeném polynomy $ax+b$, $a, b \in \mathbb{Z}_7$ sčítanými a násobenými modulo ireducibilní polynom x^2+2, k matici

$$\begin{pmatrix} 5x & 3x \\ 1 & 4x+5 \end{pmatrix}$$

Teorie:

T1 (2b) Dokažte, že matice $n \times n$ maximální hodnosti má inverzní matice z pravé i levé strany $MA = AN = E$ a že $M = N$.

T2 (5b) Rotace v trojrozměrném Euklidovském prostoru jsou lineární zobrazení na vektorech. Reprezentujte je pomocí maticového násobení.

T3 (1b) Dokažte, že $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

T4 (2b) Dokažte, že $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

T5 (3b) Dokažte, že vynecháme-li z matice A sloupec, který je LK ostatních sloupců, pak se nezmění dimenze lineárního obalu sloupců ani dimenze lineárního obalu řádků. Nepoůžívejte vzorec $h(A) = h(A^T)$.

T6 (2b) Dokažte, že platí $h(A+B) \leq h(A) + h(B)$ a najděte příklad na rovnost i ostrou nerovnost.

T7 (3b) Nechť $\mathcal{M}$ je nějaká množina matic, která tvoří grupu. Řekneme, že A a B z $\mathcal{M}$ jsou konjugované matice, pokud existuje $U \in \mathcal{M}$ takové, že $UAU^{-1} = B$. Dokažte, že relace konugovanosti je relace ekvivalence na $\mathcal{M}$. Definujme řád prvku A jako nejmenší n takové, že $A^n = E$. Dokažte, že konjugované prvky mají stejný řád.

Ukázka:

U1 (3b) Určete jádro, obraz a hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

U2 (6b) Dokažte, že pro B, C regulární je $h(BAC) = h(A)$. A, B, C jsou čtvercové matice řádu n.

U3 (4b) Najděte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

U4 (4b) Najděte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

U5 (3b) Najděte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

U6 (3b) Rozložte matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

na součin LU, kde L je dolní a U horní trojúhelníková matice (tj. všechny elementy nad resp. pod diagonálou jsou nuly).