Minisbírka 5

Dril:

D1 Spočtěte součin
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

D2 Najděte inverzní permutaci k
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

D3 Předchozí permutaci rozložte v součin nezávislých cyklů.

D4 Permutaci
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 & 7 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$
rozložte na součin transpozic dvěma způsoby.

D5 Pro π z předchozí úlohy spočtěte π^{1000}.

D6 Určete nejmenší $k > 100$, $\pi^k = \pi$.

D7 Řešte rovnici $AXB = C$, kde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

D8 Rozložte následující permutaci na nezávislé cykly, určete znaménko a porovnejte výsledek se znaménkem získaným pomocí počtu inverzí:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 8 & 10 & 12 & 3 & 16 & 11 & 4 & 5 & 15 & 17 & 14 & 7 & 2 & 9 & 6 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

D9 Určete znaménko u členu $a_{52}a_{35}a_{73}a_{17}a_{41}a_{26}a_{64}$ v definici determinantu matice $A \in M_{7,7}$.

D10 Spočtěte determinant komplexní matice
$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-di \end{pmatrix}$$

D11 Pomocí Sarussova pravidla spočtěte determinant
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

D12 Spočtěte determinant
$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \cos y & \sin x \sin y \\ -\sin x & \cos x \cos y & \cos x \sin y \\ 0 & -\sin x & \cos y \end{vmatrix}$$

D13 Spočtěte determinant
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

D11 Spočtěte determinant
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Cvičení:

C1 (3b) Najděte všechny permutace, které komutují s
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

C2 (3b) Určete znaménko permutace
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$$

C3 (3b) Určete znaménko permutace
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n & 2 & 5 & 8 & \dots & 3n-1 & 1 & 4 & \dots & 3n-2 \end{pmatrix}$$

C4 (1b) Spočtěte determinant
$$\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$$
bez kalkulačky a bez písemného násobení ;-)

C5 (3b) Dokažte bez přímého výpočtu, že
$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

C6 (2b) Bez počítání determinantu najděte koeficienty u x^4 a x^3 v

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

C7 (2b) Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

C8 (4b) Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Teorie:

T1 (2b) Dokažte, že $\operatorname{zn}\pi = \operatorname{zn}\pi^{-1}$.
T2 (2b) Dokažte, že na množině n prvků existuje právě $\frac{n!}{2}$ sudých a právě $\frac{n!}{2}$ lichých permutací.
T3 (3b) Znám-li počet inverzí v permutaci $a_1, a_2, \dots, a_n$, kolik je inverzí v permutaci $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$? Kolik inverzí je ve všech permutacích na n prvcích dohromady?
T4 (2b) Stačí $n-1$ transpozic na vytvoření libovolné permutace na n prvcích?
T5 (3b) Označme $[n,k]$ počet permutací na n prvcích obsahujících právě k inverzí. Odvoďte rekurentní relaci

$$[n+1,k] = [n,k] + [n,k-1] + [n,k-2] + \ldots + [n,k-n]$$

T6 (6b) Popište všechny permutace, které komutují se zadanou permutací.
T7 (3b) Dokažte, že matice A je regulární, právě když $\det A \neq 0$.
T8 (2b) Dokažte, že pokud pro libovolné indexy $i_1, \dots, i_k$; $j_1, \dots, j_l$ platí $a_{i_a j_b} = 0$ a $k + l > n$, pak je determinant matice a_{ij} roven nule.
T9 (2b) Jak se změní determinant matice, pokud její (i,j)-tý element vynásobíme c^{i-j}, $c \in \mathbb{R}$?
T10 (2b) Dokažte, že determinant antisymetrické matice lichého řádu je nula.
T11 (6b) Dokažte, že determinant matice A dává objem n-rozměrného rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^n$ vytyčeného řádky matice A.

Ukázky:

U1 (3b) U permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

spočtěte π^0, π^1, π^2.
U2 (3b) Předchozí permutaci rozložte na nezávislé cykly a na transpozice.
U3 (2b) Spočtěte inverzní permutaci π^{-1}.
U4 (2b) Spočtěte π^{88}.
U5 (3b) Určete znaménko π pomocí délek cyklů, počtu transpozic a počtu inverzí.
U6 (2b) Spočtěte Sarussovým pravidlem determinant matice

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

U7 (4b) Spočtěte převodem na trojúhelníkový tvar determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

U8 (4b) Spočtěte metodou rekurentní relace determinant

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}$$

Tuto a další metody najdete podrobně popsány v úvodu kapitoly 8 - Determinátoři ve sbírce Používáme lineární algebru, která je i na webu (viz stránky cvičení, sekce Literatura).
U9 (4b) Spočtěte rekurentní metodou determinant z úlohy U7.

U10 (4b) Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 & \dots & a_2+b_n \\ a_3+b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 & \dots & a_3+b_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & a_n+b_3 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

rozkladem na součet determinantů.

U11 (4b) Spočtěte rozkladem na součet determinantů determinant z úlohy U7.

U12 (6b) Vytýkáním lineárních výrazů spočtěte tzv. Vandermondův determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

U13 (6b) Spočtěte Vandermondův determinant pomocí řádkových a sloupcových úprav.