Minisbírka 6

Dril:

D1 Ověřte, že pro matice

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

platí $\det R_z(\varphi)R_x(\psi) = \det R_z(\varphi) \det R_x(\psi)$.

D2 Řešte pomocí Cramerova pravidla

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 10 \\ 3x + 7y + 4z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

D3 Určete pouze element na pozici 12 inverzní matice k

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

D4 Rozvojem podle prvního sloupce spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

D5 Pomocí rekurentní posloupnosti spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

D6 Převodem na trojúhelníkový tvar spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

D7 Řešte rovnici

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

D8 Srovnejte obě metody výpočtu inverzní matice A^{-1} na příkladu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

D9 Vyčíslete determinant

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

Cvičení:

C1 (1b) Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix} = 0$$

C2 (3b) Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

C3 (3b) Spočtěte $(A^{-1})_{1,1}$ a $(A^{-1})_{n-1,1}$, kde matice A je

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

kde $x = \frac{1}{2\cos\beta}$.

C4 (1b) Řešte rovnici

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

C5 (2b) Dokažte, že determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

udává členy Fibonnaciho posloupnosti. To je posloupnost $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$, v níž každý člen je součtem dvou předchozích.

Teorie:

T1 (2b) Jak se změní determinant, pokud jeho elementy převrátíme vůči středu matice.

T2 (1b) Jak se změní determinant, pokud od každé řádky odečteme následující řádku, jen od poslední řádky odečteme první řádku?

T3 (2b) Jak se změní determinant, pokud matici pootočíme o 90 stupňů okolo středu matice.

T4 (3b) Určete součet determinantů všech matic řádu n takových, že v každém sloupci a každé řádce je právě jeden element roven jedné a ostatní jsou nuly.

T5 (2b) Dokažte, že determinant hermitovské matice je reálné číslo. Hermitovská matice je komplexní matice splňující $A = A^\dagger$, kde $A^\dagger$ je matice, která vznikne z A transpozicí a komplexním sdružením elementů.

T6 (5b) Dokažte, že každou matici je možné rozložit na součin LU, kde L je dolní trojúhelníková a U horní trojúhelníková matice (srv. s U6 ve čtvrté minisbírce)

T7 (5b) Numerické přiblížení n-té derivace: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou volbu vesměs různých reálných čísel $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ najděte reálné koeficienty $q_0, q_1, \dots, q_n$, aby

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sum_{i=0}^n q_i f(x + h\alpha_i)}{h^n} = f^{(n)}.$$

Pomocí L'Hospitalova pravidla převeďte tuto podmínku na soustavu $n+1$ lineárních rovnic a tu pak řešte Cramerovým pravidlem. Pokud neznáte L'Hospitalovo pravidlo, zeptejte se.

T8 (2b) Dokažte, že množina reálných čtvercových matic řádu n s nenulovým determinantem tvoří grupu (značíme $GL(n, \mathbb{R})$ - general linear group).

T9 (2b) Dokažte, že $SL(n) \equiv \{A \in GL(n) | \det A = 1\}$ je grupa (special linear group).

T10 (2b) Dokažte, že $SO(n) \subset SL(n)$, obsahující ortogonální matice s determinantem 1 je grupa (special orthogonal group). Ortogonální matice splňují $AA^T = E$, neboli množnina jejich řádků tvoří ortonormální bázi (množina sloupců také).

T11 (4b) Dokažte, že $SU(n, \mathbb{C})$ - special unitary group, je vskutku grupa, najděte explicitní vyjádření obecného prvku $SU(2)$ a vypozorujte vztah výsledku k tělesu kvaternionů. Unitární matice jsou komplexní matice splňující $AA^\dagger = E$.

T12 (2b) Dokažte, že determinant blokově diagonální matice

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{lk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{l1} & \dots & b_{ll} \end{vmatrix}$$

je roven $\det A \det B$.

Ukázky:

U1 (5b) Spočtěte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

pomocí algebraických doplňků i metodou řádkových úprav.

U2 (3b) Dokažte, že

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \dots & 0 & b_{2n} \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

U3 (4b) Řešte Cramerovým pravidlem soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + y + z &= a \\ x + by + z &= b \\ x + y + cz &= c \end{aligned}$$

U4 (4b) S využitím věty o determinantu součinu spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

U5 (4b) Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 + a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & 1 + a_2 + b_2 s & \dots & a_2 + b_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & 1 + a_n + b_n \end{vmatrix}$$

U6 (3b) Najděte matici homomorfizmu $f : T^3 \to T^4$, $f((x, y, z)) = (x + y, y + z, x + z, x)$

(a) vzhledem ke kanonickým bázím,

(b) vzhledem k bázím $M = \{\ (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, -1, 0)\}$, $M' = \{, (1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\}$.

U7 (2b) Najděte matici přechodu od kanonické báze k M.

U8 (3b) Najděte matici přechodu od M' ke kanonické bázi.

U9 (5b) Identifikujte koeficienty charakteristického polynomu pro matici 3×3.