Minisbírka 7

Dril:

(1) V prostoru T^3 určete vektor u, který má souřadnice $\{u\}_M = (2, 2, -3)$ k bázi $M = \{(1, 2, 1), (2, -1, 3), (4, 3, 6)\}$.
(2) V prostoru T^3 nalezněte souřadnice vektoru $u = (-10, 7, -4)$ vzhledem k bázi $M = \{(2, 1, 3), (-3, 1, -2), (5, -2, 4)\}$.
(3) Najděte matici přechodu od báze $M = \{(1, 2, 1), (2, -1, 3), (-2, 3, 2)\}$ k bázi $M' = \{(-5, 9, 2), (6, -10, 5), (-1, 2, 9)\}$.
(4) V označení předchozího příkladu určete souřadnice vzhledem k M vektoru u, pro nějž $\{u\}_{M'} = (1, 2, 3)$.
(5) V označení třetího příkladu určete souřadnice vzhledem k M' vektoru u, pro nějž $\{u\}_M = (1, 2, 3)$.
(6) Určete matici homomorfizmu $f : T^3 \to T^4$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_1, x_2, x_3)$ vzhledem ke kanonickým bázím T^3 a T^4 a vzhledem k bázím $M = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ a $M' = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$.
(7) Homomorfizmus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ má vzhledem k bázím $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ a $\{(1, 1), (2, 0)\}$ matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete obraz vektoru (x, y, z).

Cvičení:

C1 (1b) Najděte souřadnice vektoru $u = (7, -3, 4, 12)$ vzhledem k bázi $M = \{(2, 3, 1, 4), (1, -2, 2, 3), (-3, 2, 1, -2)$ podprostoru $\langle M\rangle \subset T$.
C2 (2b) Najděte matici přechodu od báze M k bázi M' prostoru $\langle M\rangle = \langle M'\rangle \subset T^4$, kde $M = \{(2, 2, 1, 1), (9, -6, 4, 1), (-2, 6, -1, -2)\}$ a $M' = \{(-8, 14, -3, 4), (-1, 0, -1, -6), (-53, 80, -25, -27)\}$.
C3 (2b) Najděte matici přechodu od báze M k bázi M' prostoru $\langle M\rangle = \langle M'\rangle \subset T^4$, kde $M = \{(1, 3, 2, -1), (-2, 4, -3, 2), (-4, 18, -5, 4)\}$ a $M' = \{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 2, 3, 4)\}$.
C4 (2b) Buďte $M = \{(1, 2, -1, 1), (2, -3, 2, 1), (-1, 2, 1, -3), (-3, 1, 2, 4)\}$ a $M' = \{(-15, 11, -1, 20)$, $(20, -32, 22, -10)$, $(22, -19, -1, -17)$, $(24, -39, 22, -3)$ dvě báze T^4. Určete $\{u + v\}_M$ a $\{u + v\}_{M'}$, pokud víte, že $\{u\}_M = (1, -1, 1, -1)\}$ a $\{v\}_{M'} = (2, 1, 0, -1)$.
C5 (2b) Určete matici homomorfizmu $f : T^3 \to T^4$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_1, x_1, x_1)$ vzhledem ke kanonickým bázím T^3 a T^4 a vzhledem k bázím $M = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ a $M' = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$. Určete jádro a obraz f.
C6 (2b) Určete matici homomorfizmu $f : (\mathbb{Z}_3)^4 \to (\mathbb{Z}_3)^4$, $f((x, y, u, v)) = (x + 2v, u + v, 2y, 2u + v)$ vzhledem ke kanonické bázi a k bázi $M' = \{(2, 1, 0, 1), (0, 2, 0, 1), (0, 0, 2, 2), (0, 0, 0, 2)\}$. Určete jádro a obraz f.
C7 (3b) Určete matici endomorfizmu $\mathbb{R}^n$ daného $f((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ vzhledem k bázi $\{(1, 1, \ldots, 1), (1, 0, 1, \ldots, 1), \ldots, (1, 1, \ldots, 1, 0)\}$.
C8 (3b) Najděte matici homomorfizmu $h : P^n\langle -1, 1\rangle \to P^{n+1}\langle -1, 1\rangle$ vzhledem k bázím $\{1, x, \ldots, x^n\}$ a $\{1, x. \ldots, x^{n+1}\}$, který je dán vztahem $h[f(t)](x) = \int_0^x f(t)dt$.
C9 (3b) Najděte matici přechodu od báze $M = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}$ k bázi $N = \{x^2 + 2, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}$ prostoru $P^2\langle -1, 1\rangle$.
C10 (4b) Najděte automorfizmus f VP $\mathbb{R}^3$, který je sám k sobě inverzní a pro který $f((2, 3, 1)) = (1, 0, 2)$ a $f((0, 0, 1)) = (0, 0, 1)$.
C11 (2b) Je dán homomorfizmus $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$f\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = a\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rozhodněte, jestli je f automorfizmus a pokud ano, najděte matici inverzního automorfizmu vzhledem ke kanonickým bázím.

Teorie:

T1 (2b) Jsou dány dvě báze M, M' prostoru T^n. Udejte nutnou a postačující podmínku pro existenci báze M'', takové, aby pro libovolný vektor u platilo $\{u\}_M + \{u\}_{M'} + \{u\}_{M''} = 0$.
T2 (2b) Dokažte, že $f : V_1 \to V_2$ je monomorfizmus, právě když $\forall V'$ a $\forall \mu, \nu : V' \to V_1$ platí $f \circ \mu = f \circ \nu \Longrightarrow \mu = \nu$.
T3 (2b) Dokažte, že $f : V_1 \to V_2$ je epimorfizmus, právě když $\forall V'$ a $\forall \mu, \nu : V_2 \to V'$ platí $\mu \circ f = \nu \circ f \Longrightarrow \mu = \nu$.
T4 (1b) Dokažte, že složení dvou monomorfizmů je monomorfizmus a složení dvou epimorfizmů je epimorfizmus. Bonus 2 body, pokud použijete pouze ekvivalentní podmínku z posledních dvou úloh.
T5 (1b) Dokažte, že pro f endomorfizmus T^n je f automorfizmus $\Leftrightarrow$ f monomorfizmus $\Leftrightarrow$ f epimorfizmus.
T6 (2b) Najděte příklad endomorfizmu, který je mono, ale není auto.
T7 (2b) Najděte příklad endomorfizmu, který je epi, ale není auto.
T8 (4b) Ukažte, že determinant matice endomorfizmu f udává vztah mezi objemem rovnoběžnostěnu definovaného bázovými vektory báze M a definovaného množinou $f(M)$. Speciálně ukažte, že grupa $SL(n, \mathbb{R})$ obsahuje právě matice, které tento objem nemění.
T9 (1b) Ukažte, že pokud $A \sim B$ (matice jsou si podobné), pak existuje báze, v níž má zobrazení $T^n \to T^n$, $x \to Ax$ matici homomorfizmu B.
T10 (2b) Ukažte, že pokud $A \sim B$, pak $\forall k \in \mathbb{Z}$ $A^k \sim B^k$.

Ukázka:

U1 (2b) Najděte souřadnice vektoru $u = (-8, -1, -10, 2)$ vzhledem k bázi $M = \{(1, 3, -2, 5), (2, -1, 0, -2), (-3, 1, -4, 3)$ podprostoru $\langle M\rangle \subset T$.
U2 (2b) Vektor u má vzhledem k bázi $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ souřadnice $\{u\}_M = (1, 2, 3, 4)$. Jaké jsou jeho souřadnice k bázi $M' = \{u_1', u_2', u_3', u_4'\}$, kde $u_1 = u_1' - 3u_2' - 2u_3' + 4u_4'$, $u_2 = -3u_1' + 10u_2' + 3u_3' - 2u_4'$, $u_3 = -u_1' + 4u_2' - 5u_4'$, $u_4 = -3u_1' + 11u_2' + u_3' - 2u_4'$.
U3 (3b) Vektor u má souřadnice $\{u\}_{M'} = (1, 2, 3, 4)$. Jaké jsou souřadnice vzhledem k M?

U4 (2b) Určete matici homomorfizmu $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1+x_2, x_2+x_3, x_1+x_3)$ vzhledem k bázím $M = \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ a $M' = \{(1,1,0),\ (1,0,2),\ (0,1,1)\}$ a ověřte pro vektor $(1,1,1)$.

U5 (2b) Určete matici předchozího homomorfizmu vzhledem ke kanonické bázi.

U6 (2b) Najděte matici homomorfizmu $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ daného předpisem $f((u,v,x,y)) = (u-v, v-x, x-y)$ vzhledem k bázím $\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ a $\{(1,0,1),(0,2,0),(0,-3,1)\}$.

U7 (2b) Najděte matici homomorfizmu $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^2$ daného předpisem

$$f\left(a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\right) = a\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

vzhledem ke kanonické bázi v $(\mathbb{Z}_7)^3$ a bázi $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}$.

U8 (3b) Nechť $v \in \mathbb{R}^3$. Určete matici homomorfizmu $f_v(x) = v \times x$ daného vektorovým součinem s v vůči kanonické bázi a vůči bázi $\{(1,1,0),\ (1,-1,0),\ (0,0,1)\}$.